25. Komplexní čísla

1. Je dáno komplexní číslo $\boldsymbol{a} = \frac{15+15\sqrt{3}i}{3i}$.
   a) Určete absolutní hodnotu.
   b) Určete číslo komplexně sdružené k $\boldsymbol{a}$, $(\overline{\boldsymbol{a}})$.
   c) Určete vzdálenost čísel $a, \bar{a}$.

2. Nakreslete číslo $\bar{a}$, je-li $a = \left(2 - \frac{3}{2}i\right) \cdot (-1 + 4i)$.

3. Vypočtěte: a) $a = (-2 + 3i) \cdot i^5 + \frac{13-26i}{3+2i} - (1 - i) \cdot (1 + i)$
   b) $b = (-3 + 2i) \cdot i^3 - \frac{10-2i}{-3+i} + (-1 - i)^2$

4. Dokažte, že číslo $z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$ je komplexní jednotka a určete její argument.

5. Je dáno komplexní číslo $a = \frac{15-5i}{1+2i} - \frac{1-3i}{i} + (3 + i) \cdot (-1 + 2i)$. Znázorněte ho v Gaussově rovině a vypočtěte a^5.

6. Užitím Moivreovy věty umocněte komplexní číslo $\left(\cos\frac{\pi}{18} + i \sin\frac{\pi}{18}\right)^6$ a výsledek převeďte do algebraického tvaru.

7. Řešte rovnice v $\boldsymbol{C}$:
   a) $(1 - 2i)z = 2\bar{z} - i(2 + i)$
   b) $\frac{z}{1-i} + \frac{z+2}{i} = \frac{5}{2i-1}$
   c) $i - \left(\frac{i+1}{1-i}\right)^2 = 1 - \frac{1}{z}$

8. Řešte kvadratickou rovnici s neznámou $x \in C$:
$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

9. Řešte rovnice s neznámou $x \in C$. Výsledky zapište v goniometrickém tvaru. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.
   a) $x^3 - 1 - i = 0$
   b) $x^4 + 16 = 0$

25. Komplexní čísla - výsledky

1. a) 10

   b) $a = 5\sqrt{3} - 5i;\ \bar{a} = 5\sqrt{3} + 5i$

   c) 10

2. $a = 4 + \frac{19}{2}i;\ \bar{a} = 4 - \frac{19}{2}\mathrm{i}$

3. a) $-6 - 10i$

   b) $\frac{26}{5} + \frac{27}{5}i$

4. Ano, $\varphi = 15°$

5. $-1 - i,\ a^5 = 4 + 4i$

6. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

7. a) $z = 7 + 4i$
   b) $z = -1 - i$
   c) $z = -i$

8. a) $x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$

9. a) $x_{1,2,3} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right)\right],\ k \in \{0,1,2\}$
   b) $x_{1;2;3;4} = 2\left[\cos\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi\right)\right];\ k = \{0; 1; 2; 3\}$
   $x_{1;2} = \pm\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ $\qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{2} - \sqrt{2}i$